Ad-Soyad: 27.05.2019

Numara: **İmza:**

CEVAP ANAHTARI

SOYUT MATEMATİK II FİNAL SINAVI SORULARI

1) $[3,5]+[x,y]=[4,1]$ olacak şekilde $x,y\in\mathbb{N}$ bulunuz. $[x,y]$ tam sayısının teklikle belirli olduğunu gösteriniz.

2) $a,b\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(a,b)=1$ ise $(a+b,ab)=d$ sağlayan d sayısını bulunuz.

3) X sayılabilir, Y sonlu bir küme, $Z=\left\{\frac{n}{2}:n\in\mathbb{Z}\right\}$ olsun. $X\times Y\times(Z\cap\mathbb{R})$ kümesinin sayılabilir olup olmadığını sayılabilirlik tanımını kullanarak gösteriniz.

4) a) Rasyonel sayılarda toplama işleminin iyi tanımlı olduğunu gösteriniz.

b) $[(3,2)]$ rasyonel sayısının 2 katını, -2 katını ve karesini hesaplayınız.

c) $4x=7$ denklemini rasyonel sayılarda çözünüz.

5) Herhangi iki kesimin toplamının tanımını yapınız ve bu toplamın kesim olduğunu gösteriniz.

BAŞARILAR

1) $[3,5]+[x,y]=[4,1]$

$\Leftrightarrow [3+x,5+y]=[4,1] \Leftrightarrow (3+x,5+y)\sim(4,1)$

$\Leftrightarrow 3+x+1=5+y+4$

$\Leftrightarrow 4+x=y+9$

$x=9,\ y=4$ olarak alınabilir.

$[x,y]$, $[x_1,y_1]$ verilen eşitliği sağlayan iki tam sayı olsun.

$\Rightarrow [3,5]+[x,y]=[4,1]$

$[3,5]+[x_1,y_1]=[4,1]$

$$\Rightarrow \begin{rcases} [3+x, 5+y] = [4,1] \\ [3+x_1, 5+y_1] = [4,1] \end{rcases} \Rightarrow [3+x, 5+y] = [3+x_1, 5+y_1]$$

$$\Rightarrow 3+x+(5+y_1) = (5+y)+3+x_1$$

$$\Rightarrow x+y_1 = y+x_1 \Rightarrow [x,y] = [x_1,y_1]$$

2) $(a,b)=1 \Rightarrow \exists x,y \in \mathbb{Z} \ni ax+by=1$

$(a+b, ab)=d \Rightarrow d|a+b, \quad d|ab$

$ax+by=1 \Rightarrow a^2x^2+2abxy+b^2y^2=1$

$$\begin{rcases} d|a+b \Rightarrow d|a(a+b) \Rightarrow d|a^2+ab \\ d|ab \end{rcases} \Rightarrow d|a^2+ab-ab \Rightarrow d|a^2$$

$$\begin{rcases} d|a+b \Rightarrow d|b(a+b) \\ d|ab \end{rcases} \Rightarrow d|b^2+ab-ab \Rightarrow d|b^2$$

$$\begin{rcases} d|ab \\ d|a^2 \\ d|b^2 \end{rcases} \xRightarrow[x,y\in\mathbb{Z}]{} \begin{rcases} d|2abxy \\ d|a^2x^2 \\ d|b^2y^2 \end{rcases} \Rightarrow d|a^2x^2+2abxy+b^2y^2 \Rightarrow d|1 \xRightarrow[d>0]{} d=1$$

$\therefore (a+b, ab)=1$

3) • X sayılabilir $\iff \exists\, f: X \longrightarrow A \subseteq \mathbb{N}$

$$x \longmapsto f(x)$$

1-1, örten

• Y sonlu bir küme olduğundan sayılabilir bir kümedir.

Y sayılabilir $\iff \exists\, g: Y \longrightarrow B \subseteq \mathbb{N}$

$$y \longmapsto g(y)$$

1-1, örten

• $Z \cap \mathbb{R} = Z$

$Z \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan Z de sayılabilir bir kümedir.

Z sayılabilir $\iff \exists\, h: Z \longrightarrow C \subseteq \mathbb{N}$

$$z \longmapsto h(z)$$

1-1, örten

• $X \times Y \times Z$ sayılabilir mi?

$$f_1 : X \times Y \times Z \longrightarrow A \times B \times C$$

$$(x, y, z) \longmapsto f_1(x, y, z) = \big(f(x), g(y), h(z)\big)$$

<u>f_1 iyi tanımlı mı?</u>

$\forall (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in X \times Y \times Z$ için

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) \Longrightarrow x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$$

$$\xRightarrow[\text{iyi tanımlı}]{f, g, h} f(x) = f(x_1),\ g(y) = g(y_1),\ h(z) = h(z_1)$$

$$\Longrightarrow \big(f(x), g(y), h(z)\big) = \big(f(x_1), g(y_1), h(z_1)\big)$$

$$\Longrightarrow f_1(x, y, z) = f_1(x_1, y_1, z_1)$$

$\therefore$ f_1 iyi tanımlıdır.

<u>f_1 1-1 mi?</u>

$\forall (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in X \times Y \times Z$ için

$$f_1(x, y, z) = f_1(x_1, y_1, z_1) \Longrightarrow \big(f(x), g(y), h(z)\big) = \big(f(x_1), g(y_1), h(z_1)\big)$$

$\Longrightarrow f(x)=f(x_1),\ g(y)=g(y_1),\ h(z)=h(z_1)$

$\underset{\substack{f,g,h \\ 1-1}}{\Longrightarrow} x=x_1,\ y=y_1,\ z=z_1$

$\Longrightarrow (x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)$

$\therefore f_1$ 1-1 dir.

- f_1 örten mi?

$\forall (a,b,c)\in A\times B\times C$ için $\exists (x,y,z)\in X\times Y\times Z \ni$

$f_1(x,y,z)=(a,b,c)$ mi?

$(a,b,c)\in A\times B\times C \Longrightarrow a\in A,\ b\in B,\ c\in C$

$$\underset{\substack{f,g,h \\ \text{örten}}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \exists x\in X \ni f(x)=a \\ \exists y\in Y \ni g(y)=b \\ \exists z\in Z \ni h(z)=c \end{cases}$$

$f_1(x,y,z)=(f(x),g(y),h(z))$

$=(a,b,c)$

$\therefore f_1$ örtendir.

4) a) $\oplus: Q\times Q \longrightarrow Q$

$([(x,y)],[(z,t)]) \longmapsto [(xt+yz,yt)]$

$([(x,y)],[(z,t)])=([(x',y')],[(z',t')])$ alalım.

$\Longrightarrow [(x,y)]=[(x',y')],\ [(z,t)]=[(z',t')]$

$\Longrightarrow xy'=yx' \ /tt',\quad zt'=tz' \ /yy'$

$\Longrightarrow (xt+yz)y't'=yt(x't'+y'z')$

$\Longrightarrow [(x,y)]\oplus[(z,t)]=[(x',y')]\oplus[(z',t')]$

b) $2[(3,2)] = [(3,2)] + [(3,2)]$

$= [(3,1)]$

$-2[(3,2)] = 2[(-3,2)]$

$= [(-3,2)] + [(-3,2)]$

$= [(-3,1)]$

$[(3,2)]^2 = [(3,2)] \cdot [(3,2)] = [(9,4)]$

c) $4x = 7$

$[(4,1)][(m,n)] = [(7,1)] \Rightarrow [(4m,n)] = [(7,1)]$

$\Rightarrow 4m = 7n$

$\Rightarrow m = 7, \; n = 4$

$x = [(m,n)] = 7/4$

5) α ve β iki kesim olsun.

$\gamma = \{p+q : p \in \alpha, q \in \beta\}$ kümesine α ve β kesimlerinin toplamı denir ve $\gamma = \alpha + \beta$ ile gösterilir.

γ bir kesim mi?

K1. • α ve β kesim olduğundan $\alpha \neq \emptyset$, $\beta \neq \emptyset$

$\Rightarrow \gamma \neq \emptyset$

• $\alpha \neq \mathbb{Q}$, $\beta \neq \mathbb{Q} \Rightarrow \gamma \neq \mathbb{Q}$

K2. $r \in \gamma$ ve $s < r$ olsun.

$\Rightarrow \exists p \in \alpha, \exists q \in \beta \ni r = p+q$

$s = t+q$ olacak şekilde seçelim.

$\Rightarrow s = t+q < p+q \Rightarrow t < q \Rightarrow t \in \alpha \Rightarrow s \in \alpha + \beta = \gamma$

K3: $r \in \gamma$ olsun.

$\exists p \in \alpha, \exists q \in \beta \ni r = p + q$

$\exists s \in \alpha$ için $s > p \Rightarrow s + q \in \gamma, \ s + q > r$

$\Rightarrow r \in \gamma$

$\Rightarrow EBE(\gamma)$ yoktur.